Caos y geometría fractal

Objetivo

Mariposa

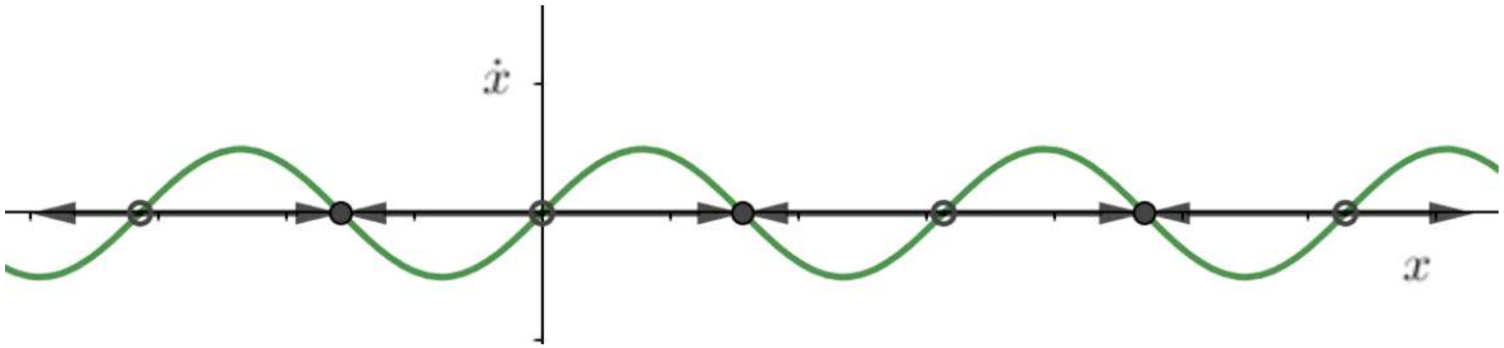
Romanescu

Repaso rápido de Dinámica No Lineal

- Trataremos sistemas

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_N) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_N) \\
&\vdots \\
\dot{x}_N &= f_N(x_1, \dots, x_N)
\end{aligned}$$

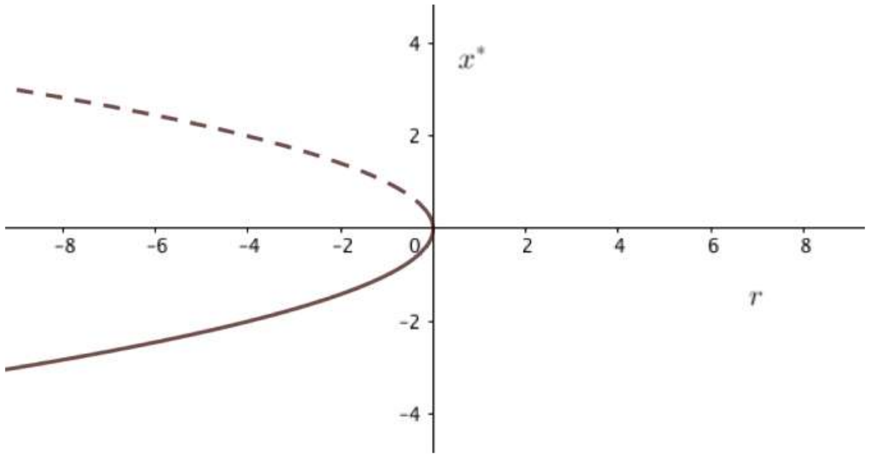
Puntos fijos y estabilidad (1D)

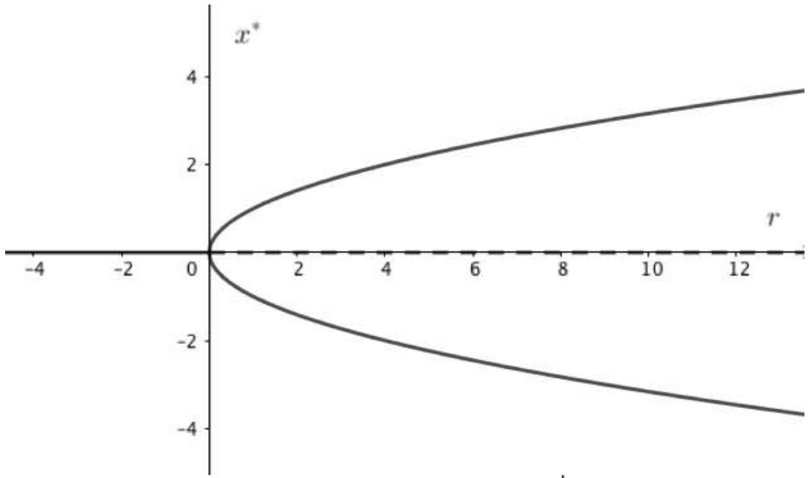


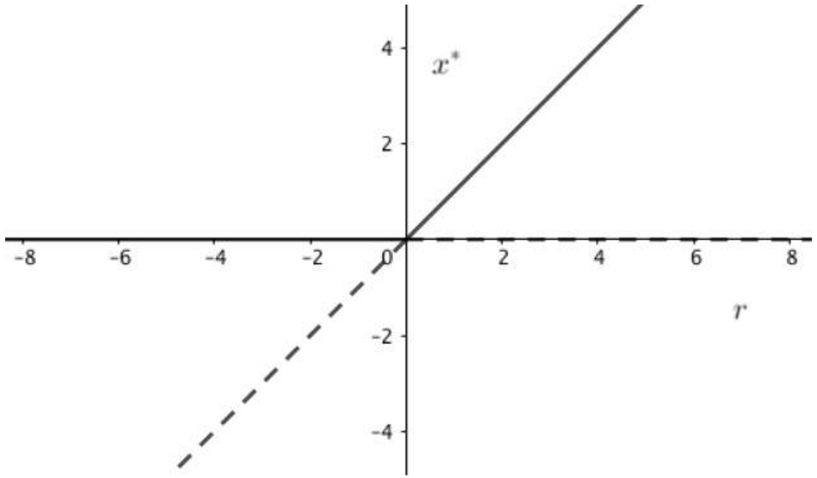
$f(x) = 0$

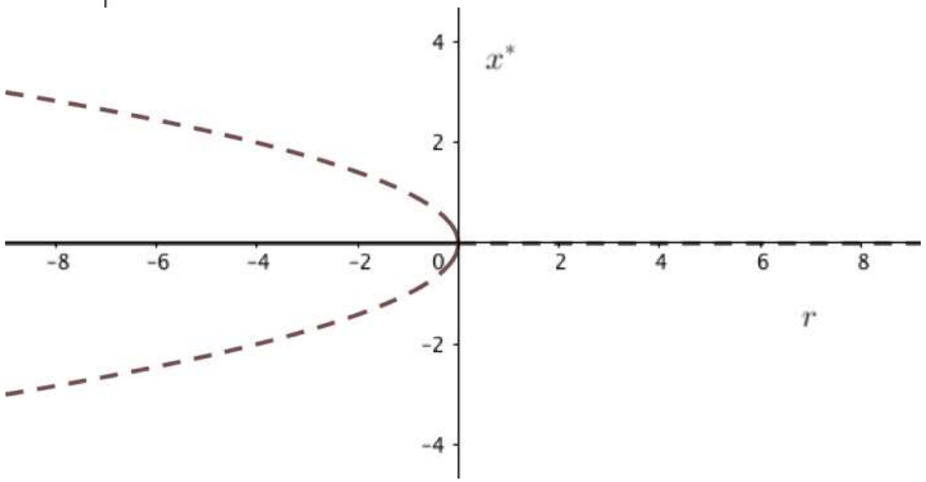
$f'(x) \lesseqgtr 0$

Bifurcaciones









Puntos fijos y estabilidad (ND)

$$f_1(x_1, \dots, x_N) = 0$$

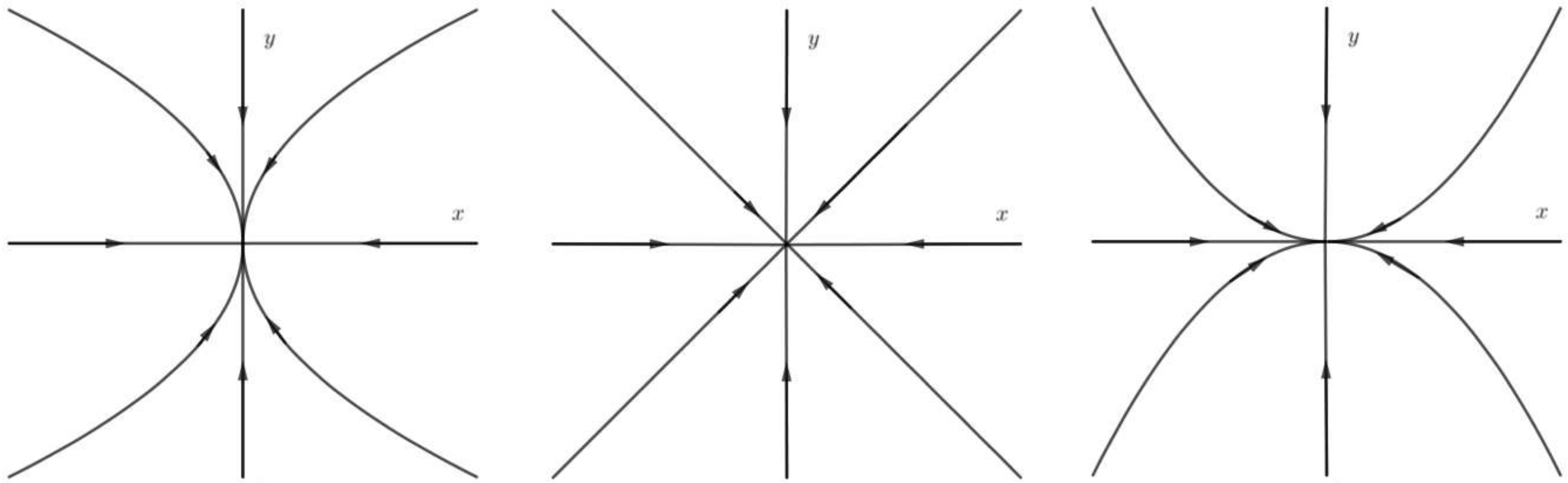
$$f_2(x_1, \dots, x_N) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_N(x_1, \dots, x_N) = 0$$

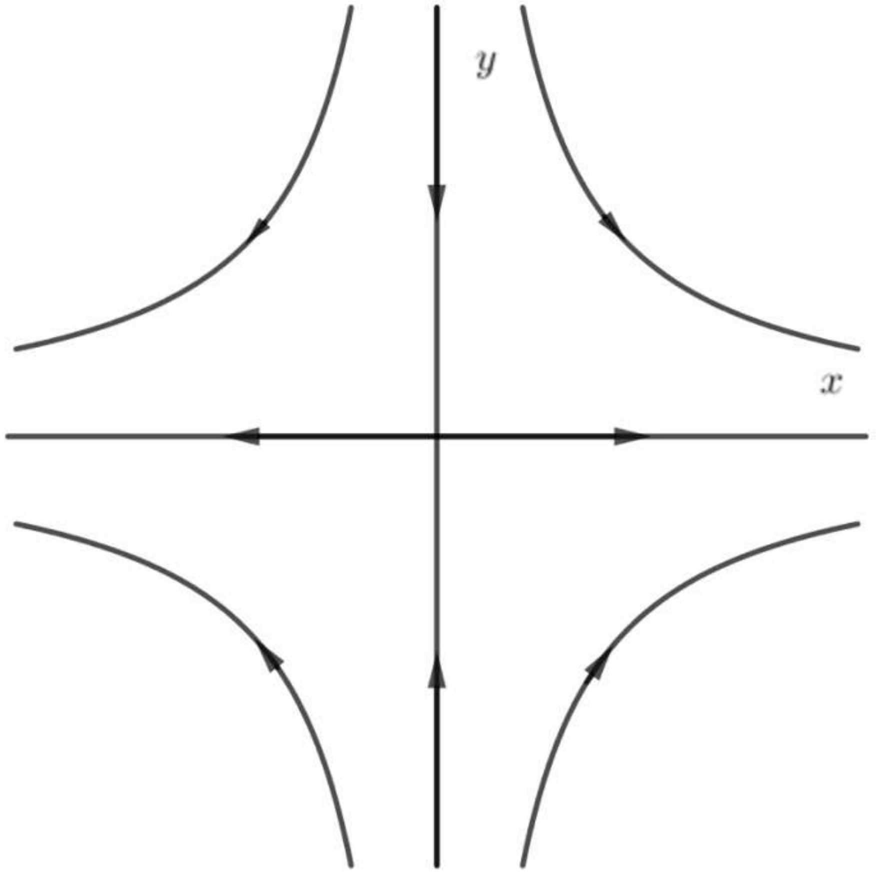
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Puntos fijos y estabilidad (ND)

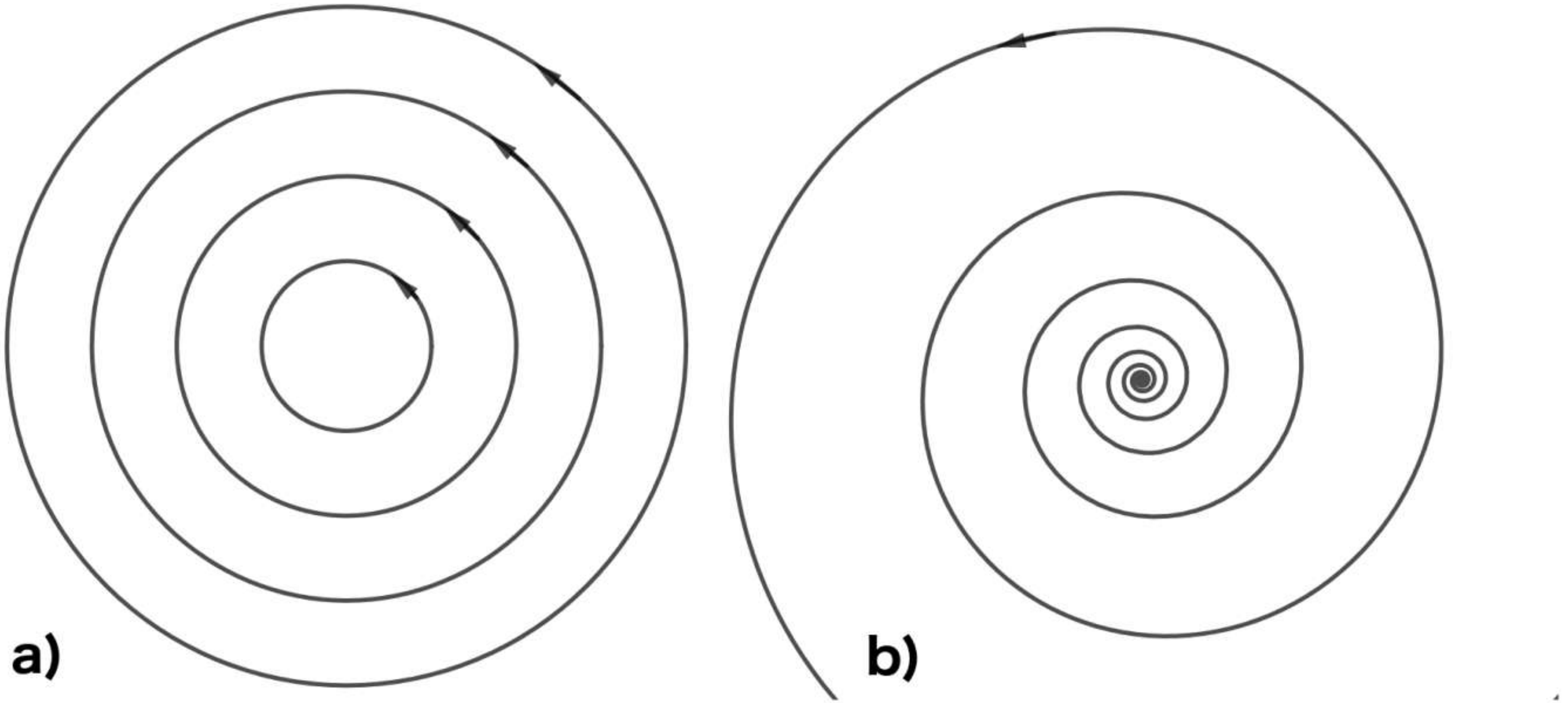


a) b) c)

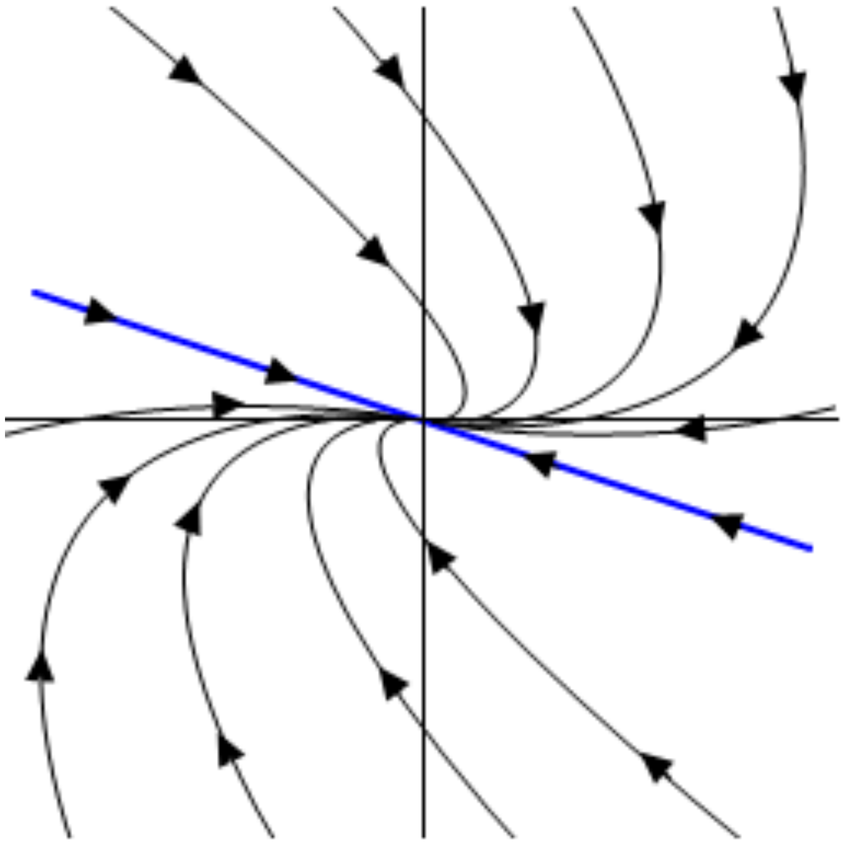
Puntos fijos y estabilidad (ND)



Puntos fijos y estabilidad (ND)

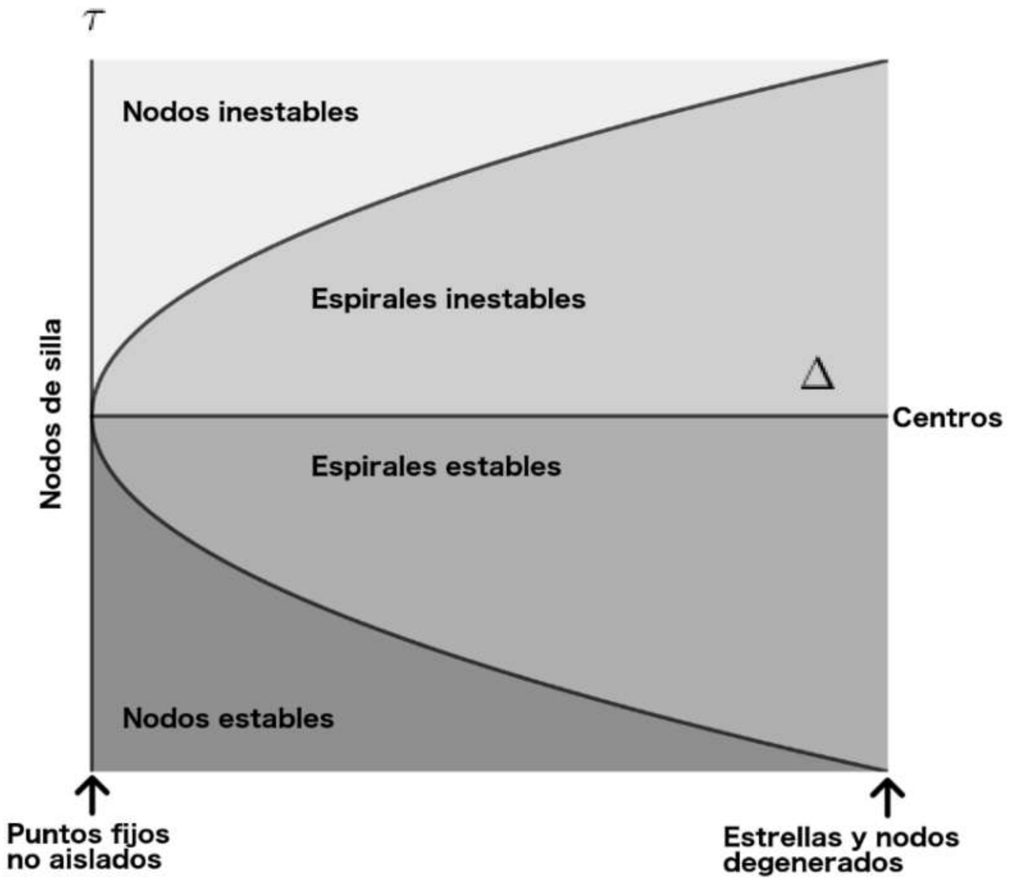


Puntos fijos y estabilidad (ND)

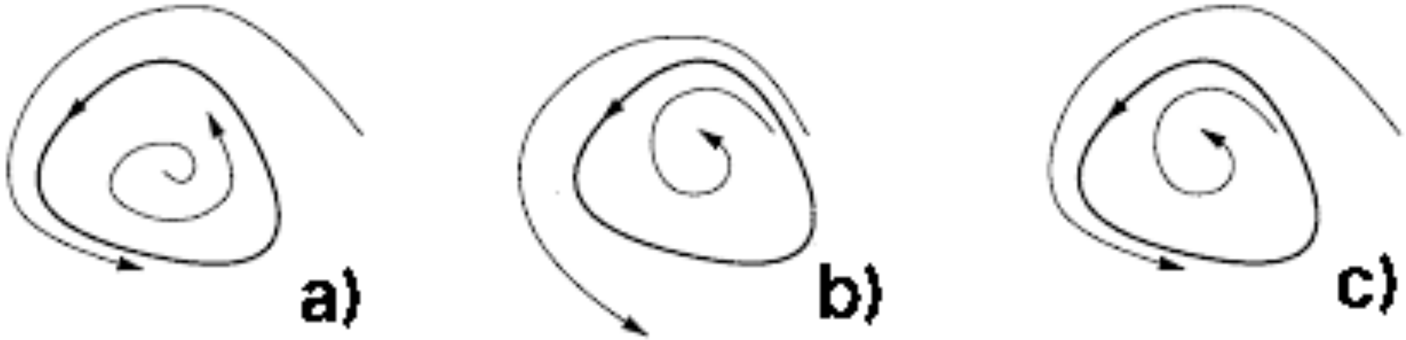


Puntos fijos y estabilidad (2D)

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$



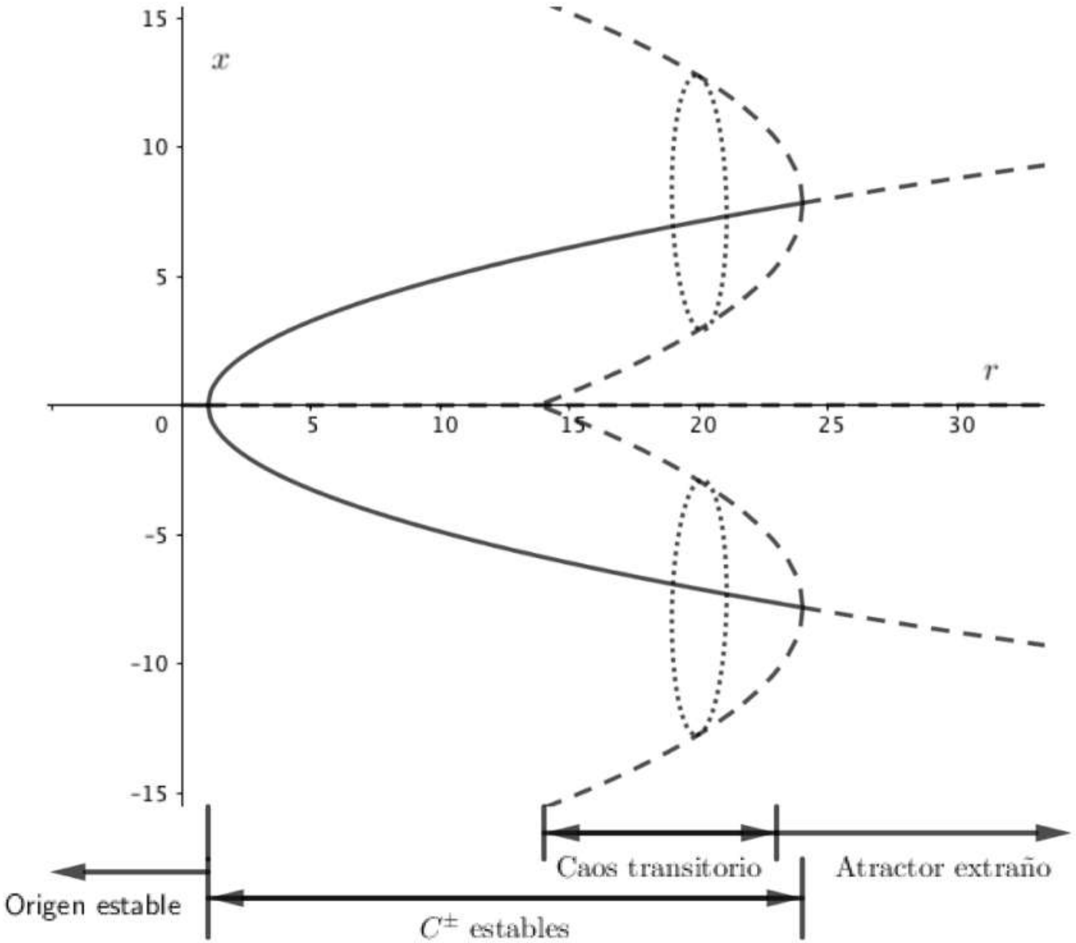
Ciclos límite



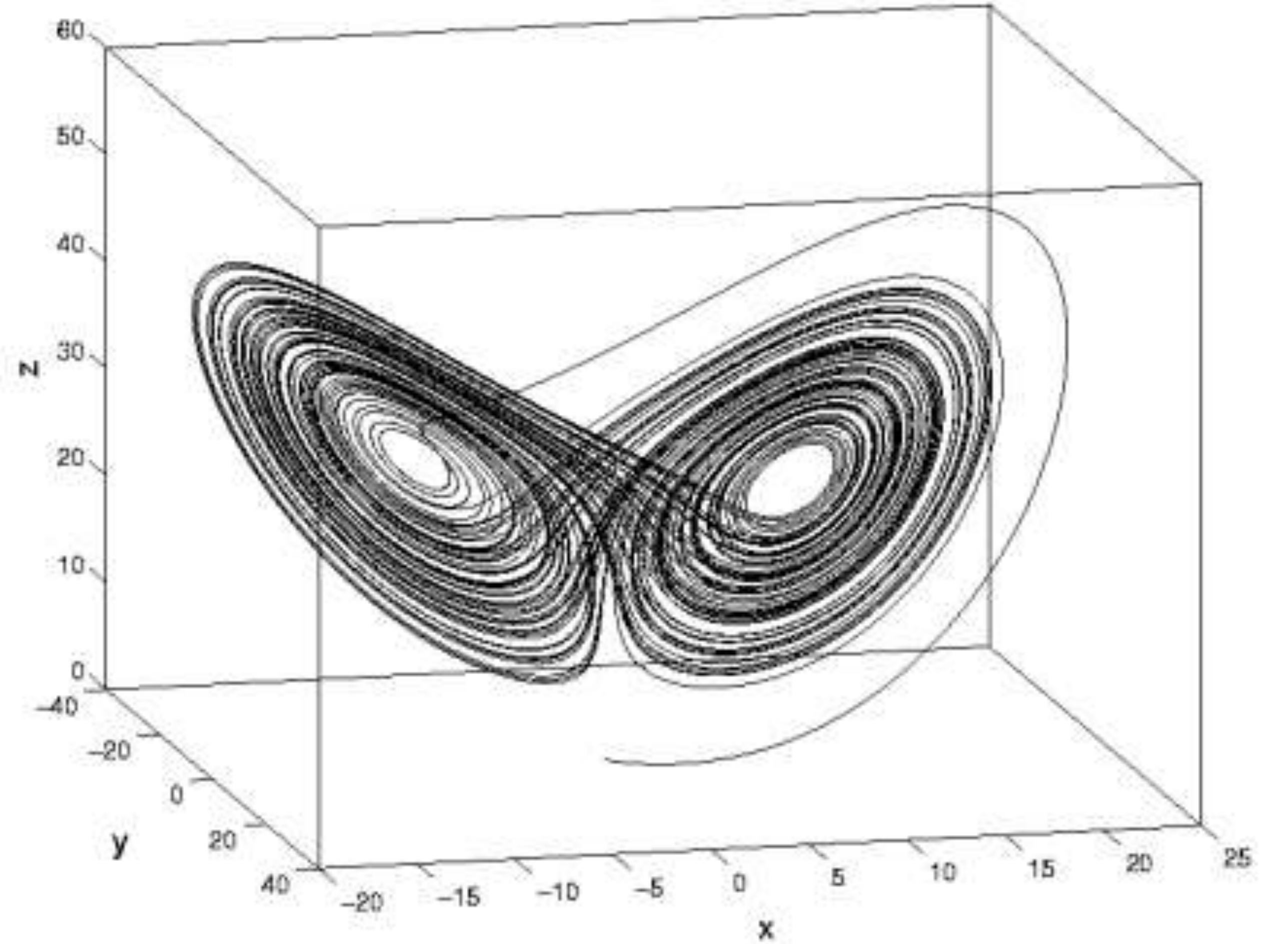
El sistema de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x - y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

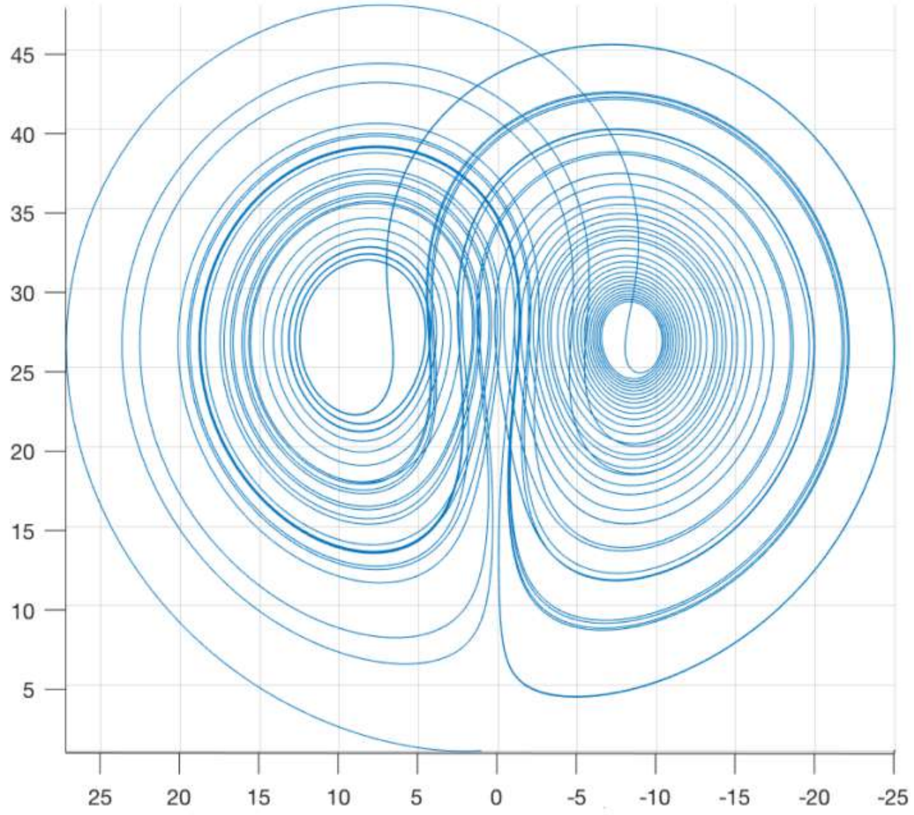
El sistema de Lorenz

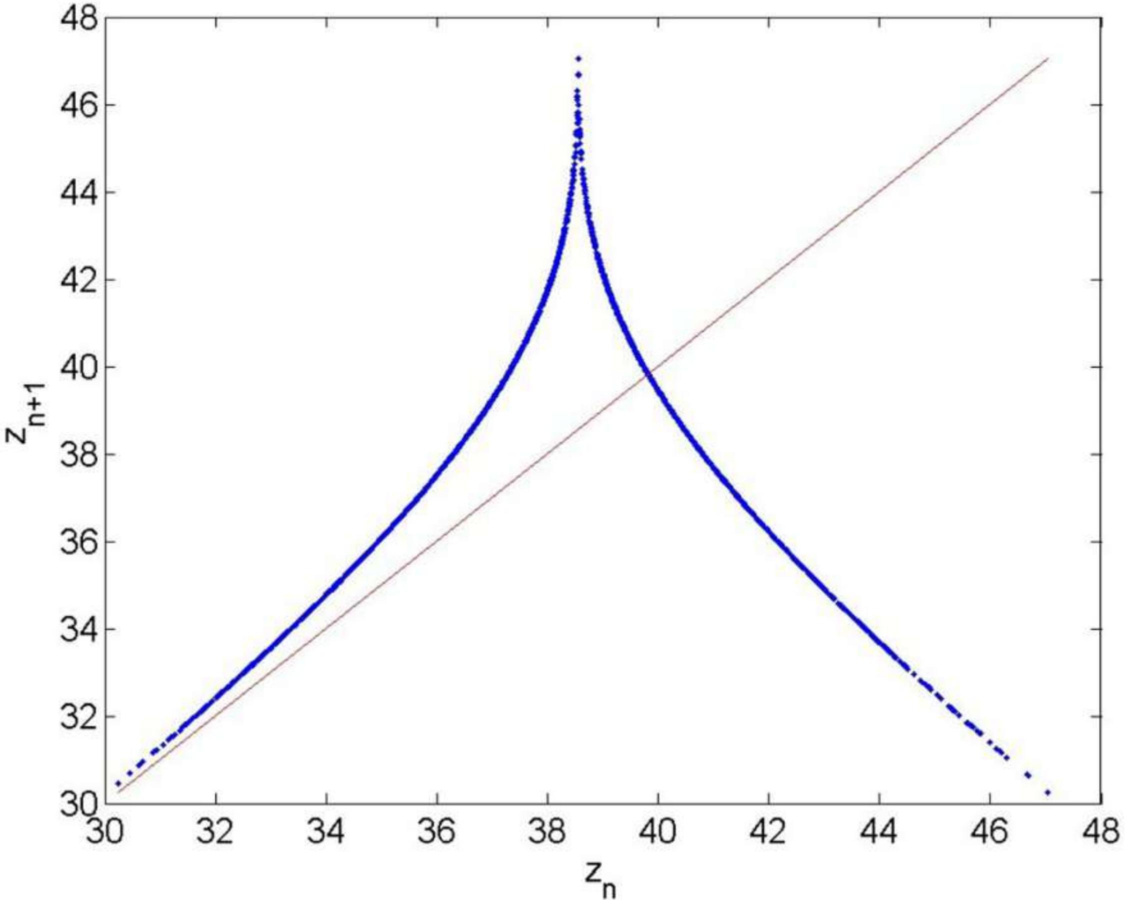


Atractor de Lorenz



El atractor no es un ciclo límite





Teoría del caos determinista

- **Caos determinista:**

« Comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema dinámico no lineal determinista, que además exhibe una dependencia sensible a las condiciones iniciales. »

Teoría del caos determinista

- **Atractor:**

« Subconjunto A del espacio de las trayectorias que cumple:

1. *A es invariante.*
2. *A "atrae" a un entorno abierto de condiciones iniciales.*
3. *A es minimal. »*

Teoría del caos determinista

- **Atractor extraño:**

« Se dice de todo conjunto A que, en adición a las propiedades anteriores, presenta una estructura fractal. »

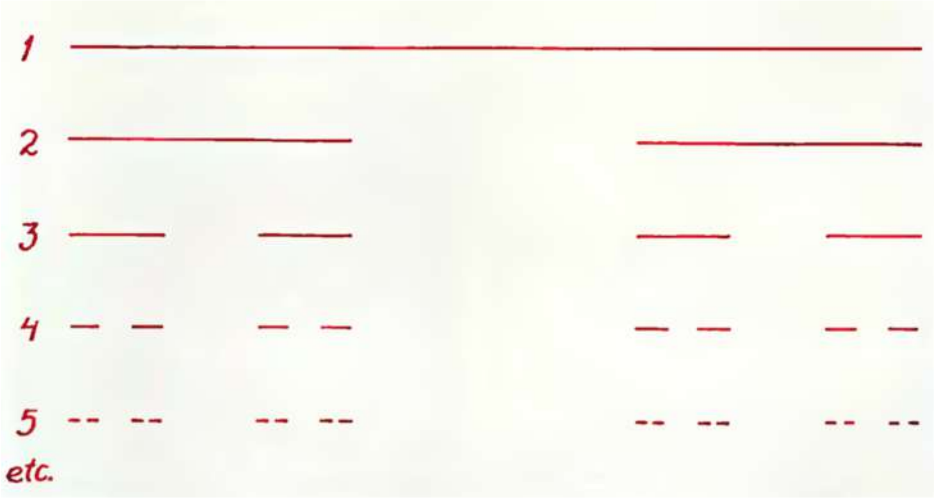
Qué es un fractal

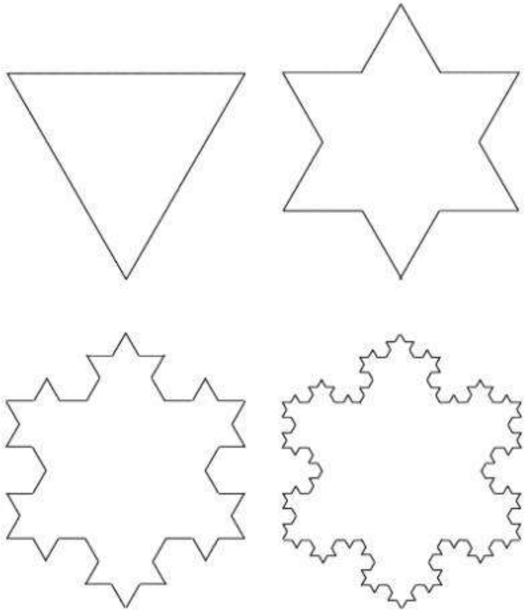
« Objeto suficientemente irregular como para no poder describirse en términos euclidianos.

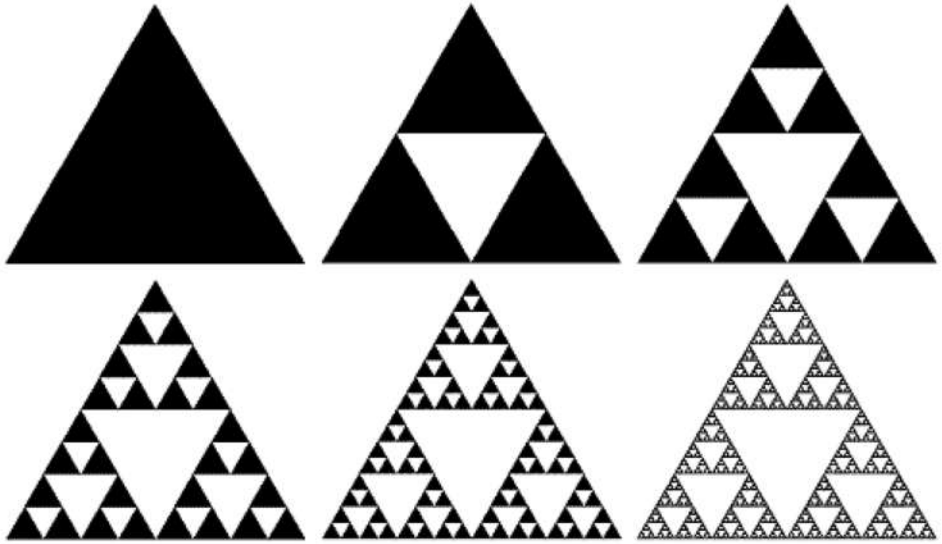
Presenta estructura compleja y autosimilitud a toda escala, de una forma u otra.

Por último, su dimensión de Hausdorff-Bezikovich es estrictamente mayor que su dimensión topológica.»

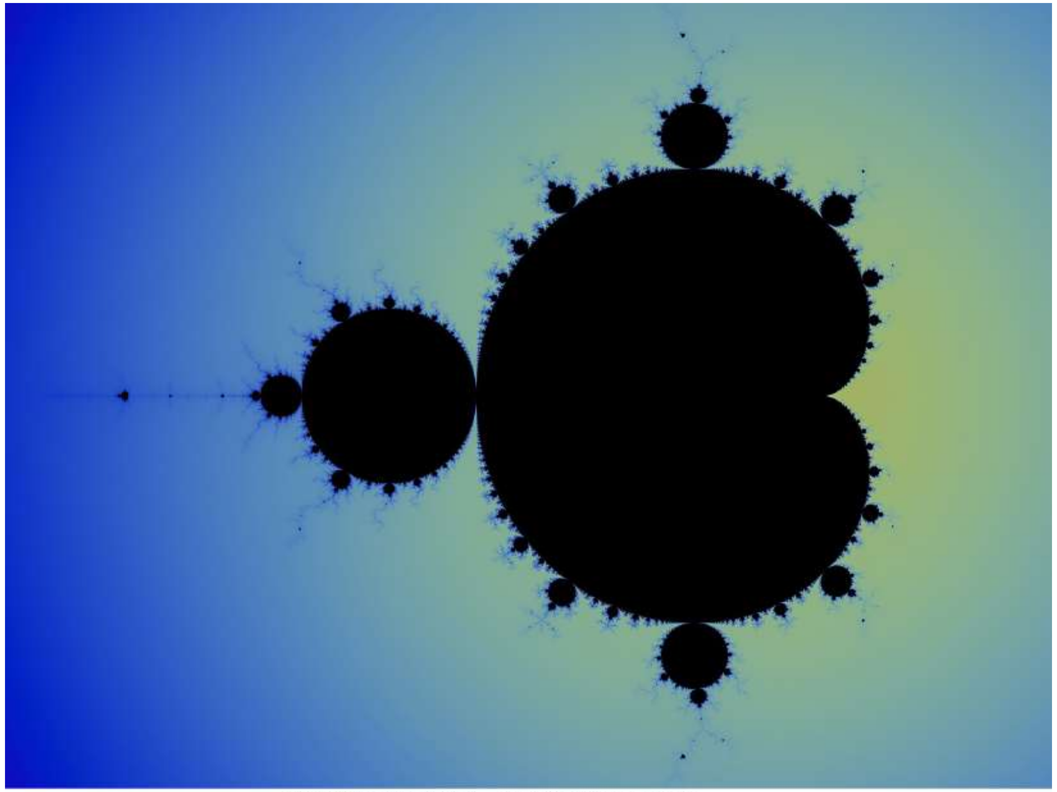
Los ejemplos típicos



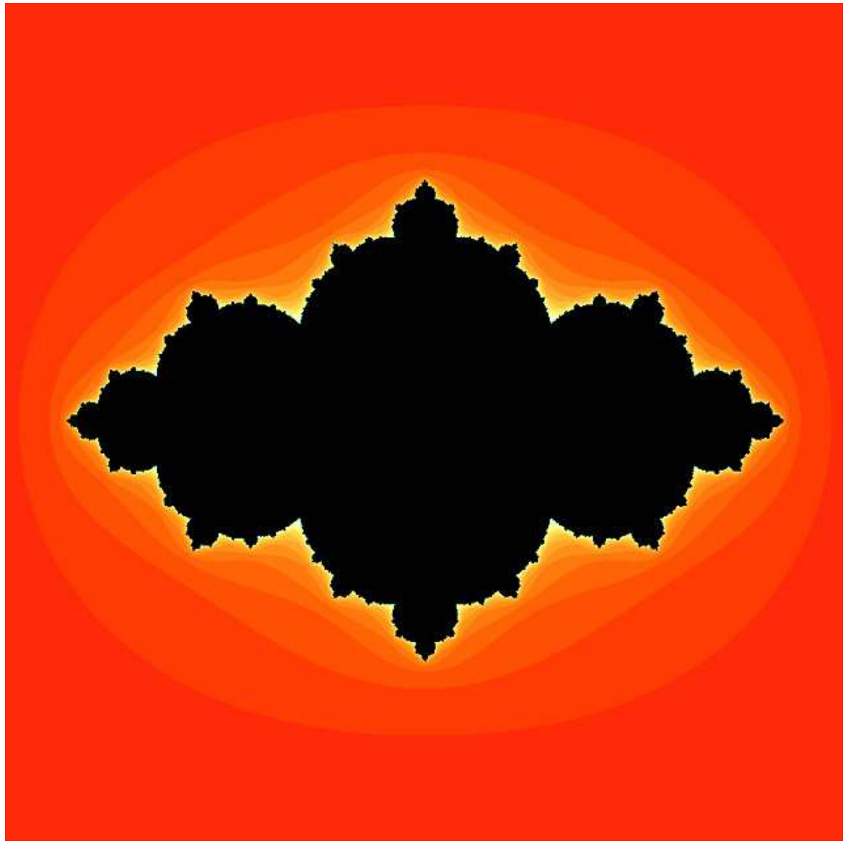




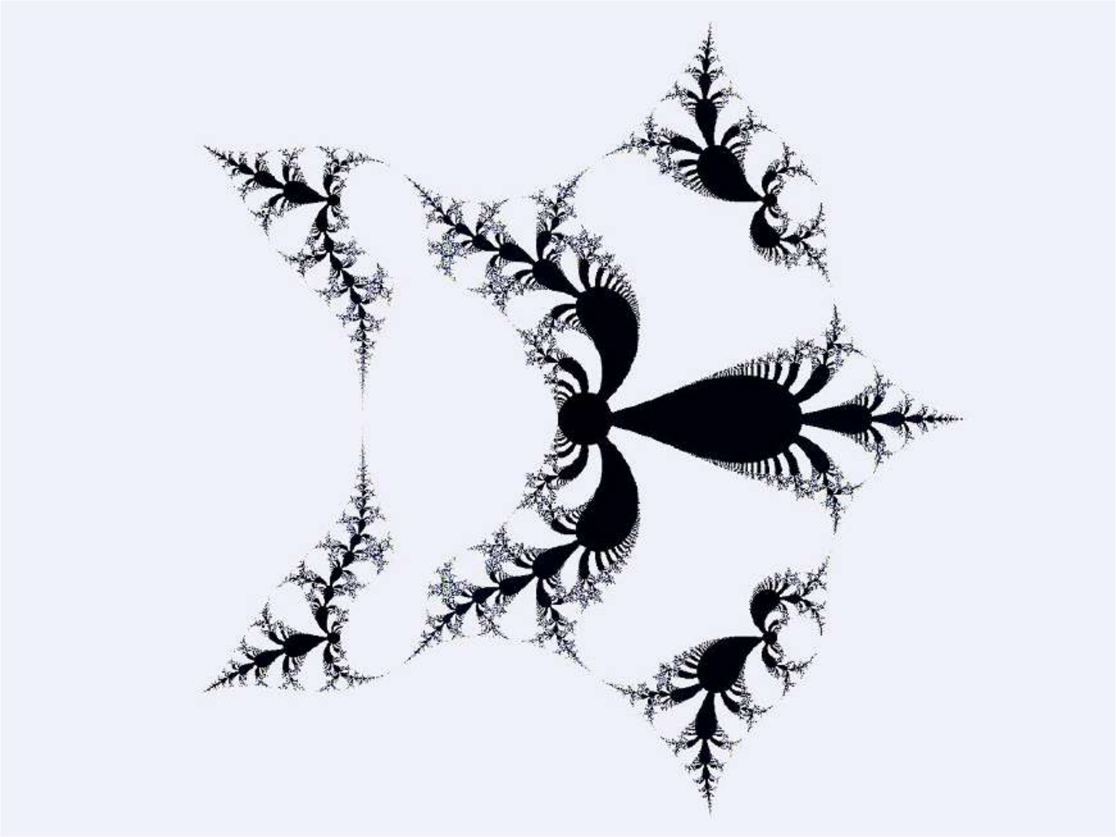
Otros ejemplos por contrato

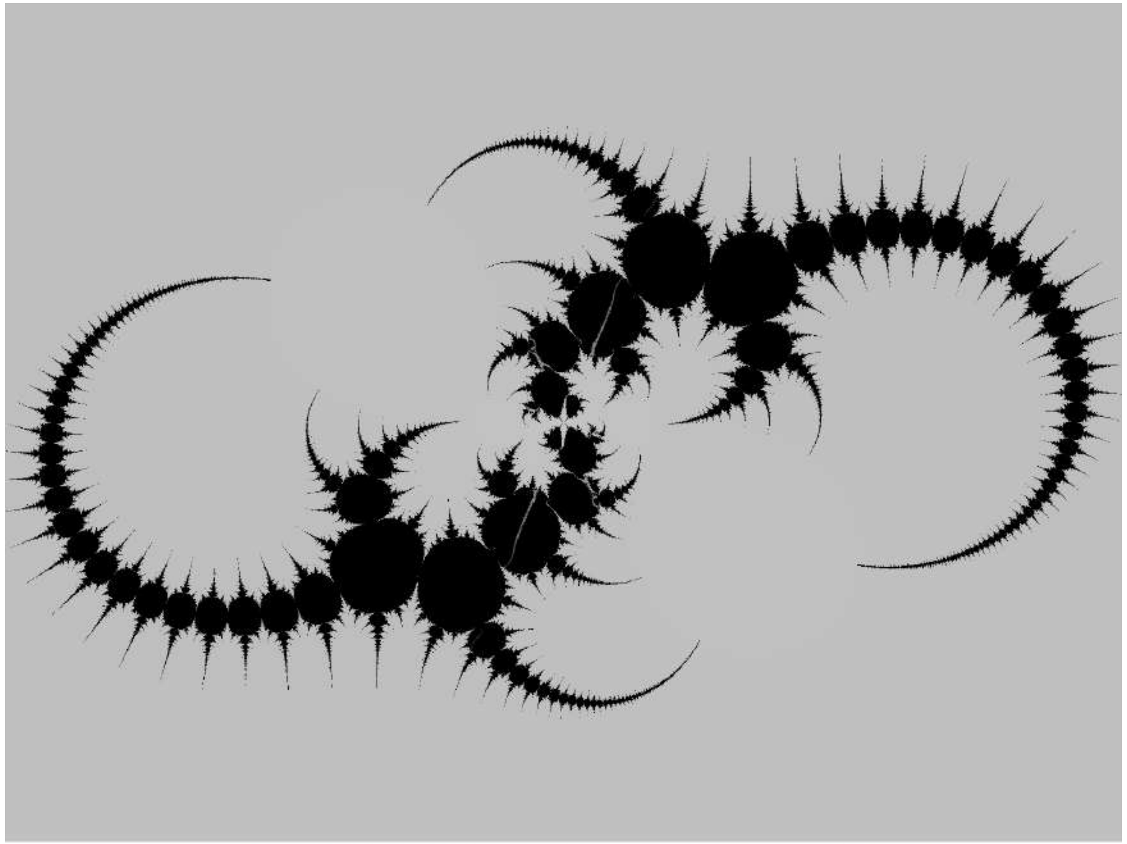


Mandelbrot method Zn+1 = Zn^2 + C   Copyright JMB 2013 made in INFINITY



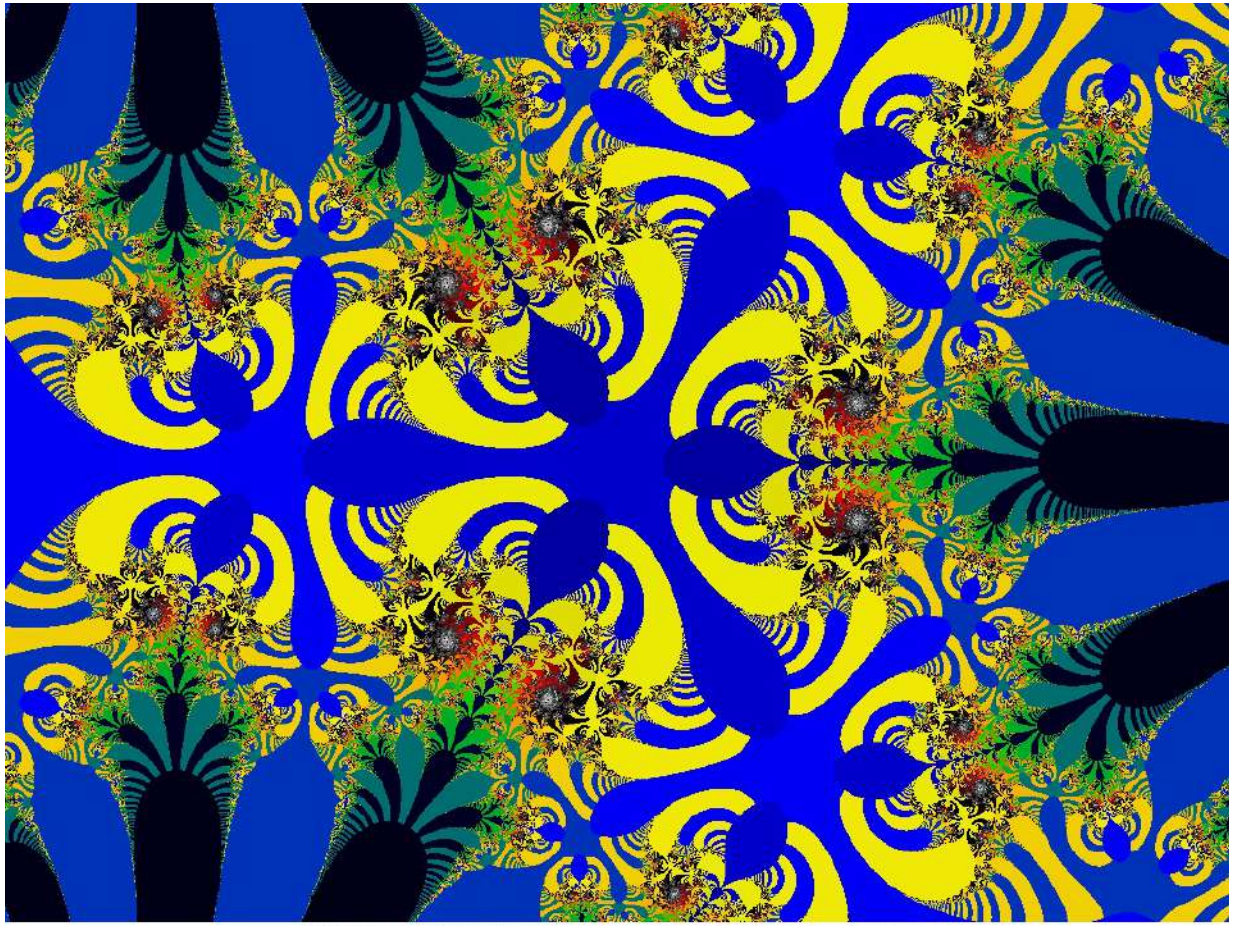
Un par de ellos curiosos para tatuajes





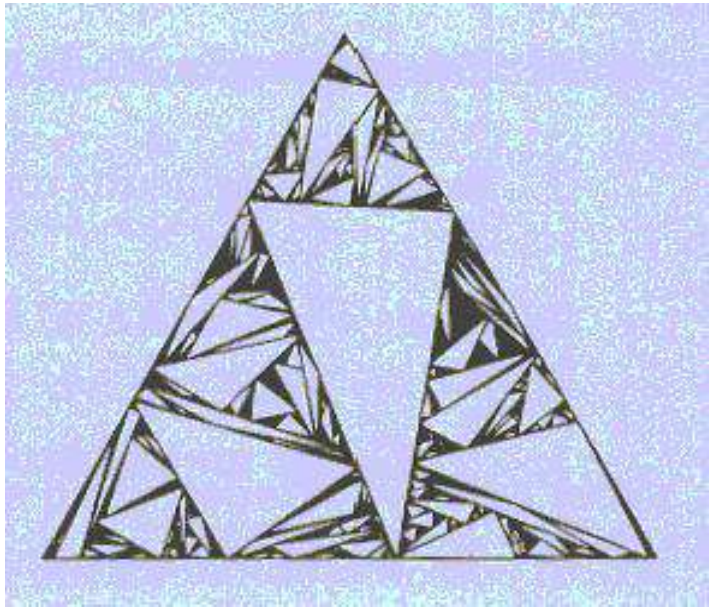
Mandelbrot method. Zn+1 = SinH (Zn) + 1/C^2 x1= 1.0 , y1= 0.1 Iter = 300 Copyright JMB 2013

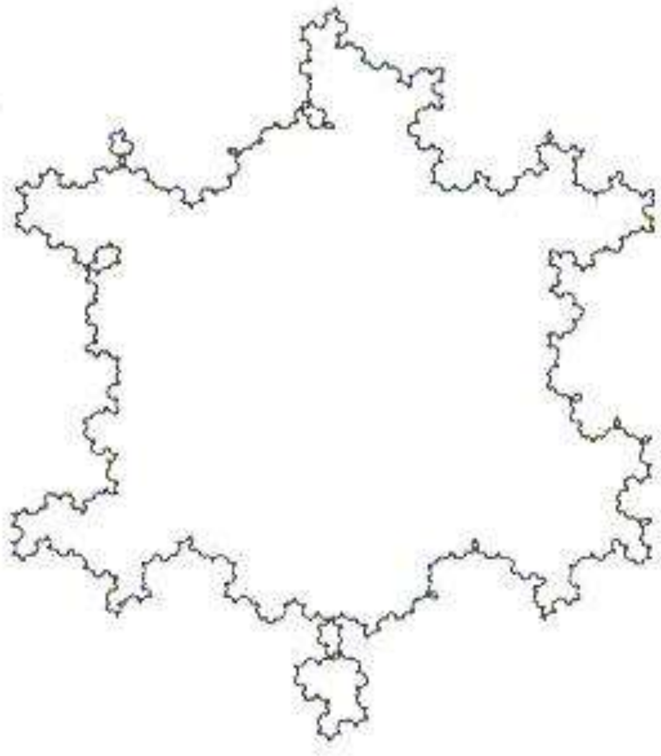
Un viaje de ácido

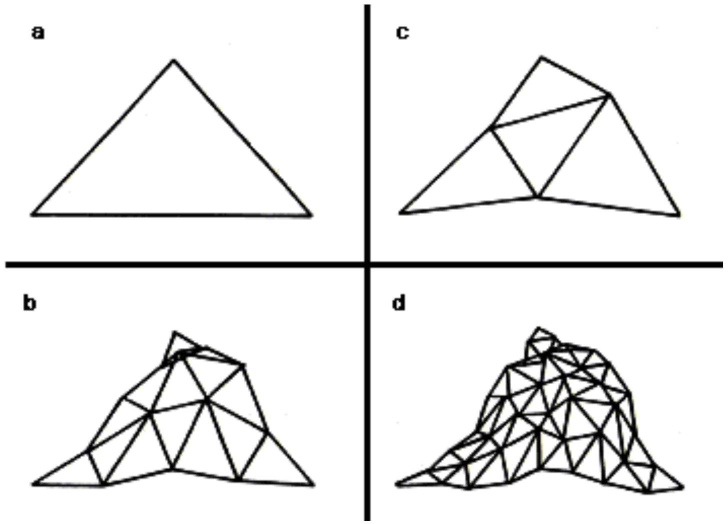


MÈTODE DE JULIA Z = EXP (Z^3) + C Cx = -0.59 Cy = 0.00

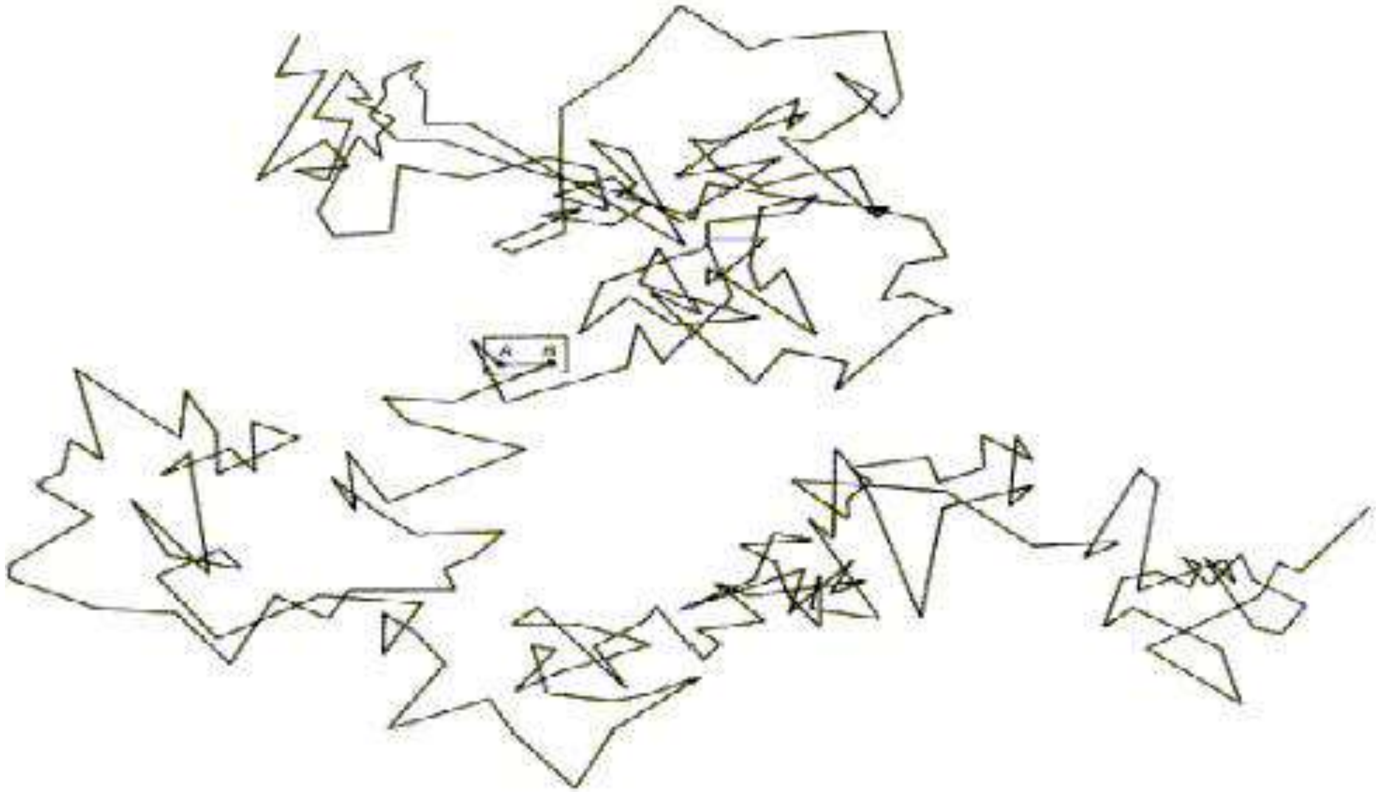
Fractales aleatorios







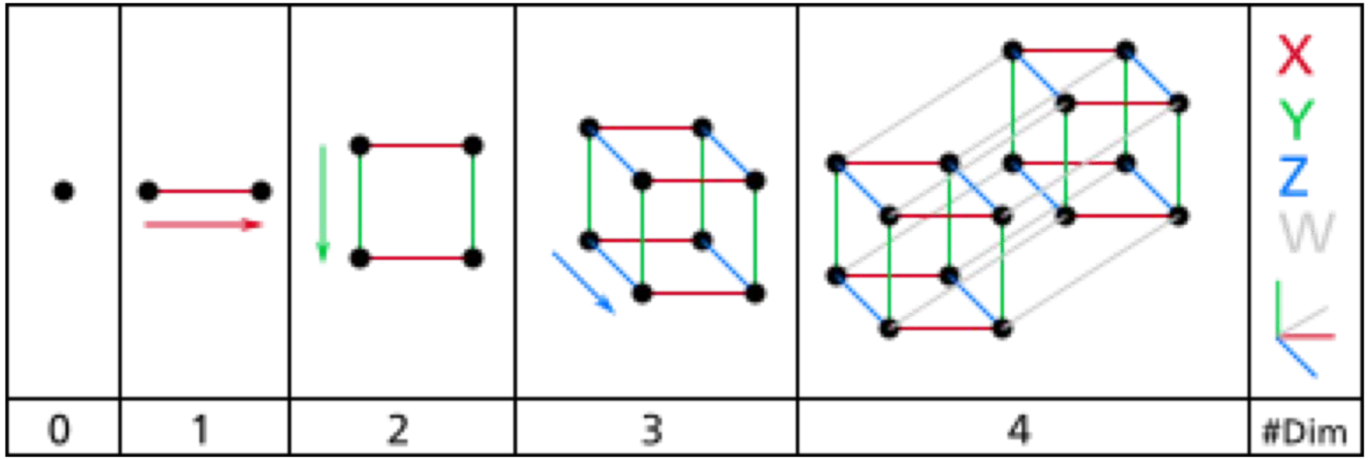
Movimiento browniano



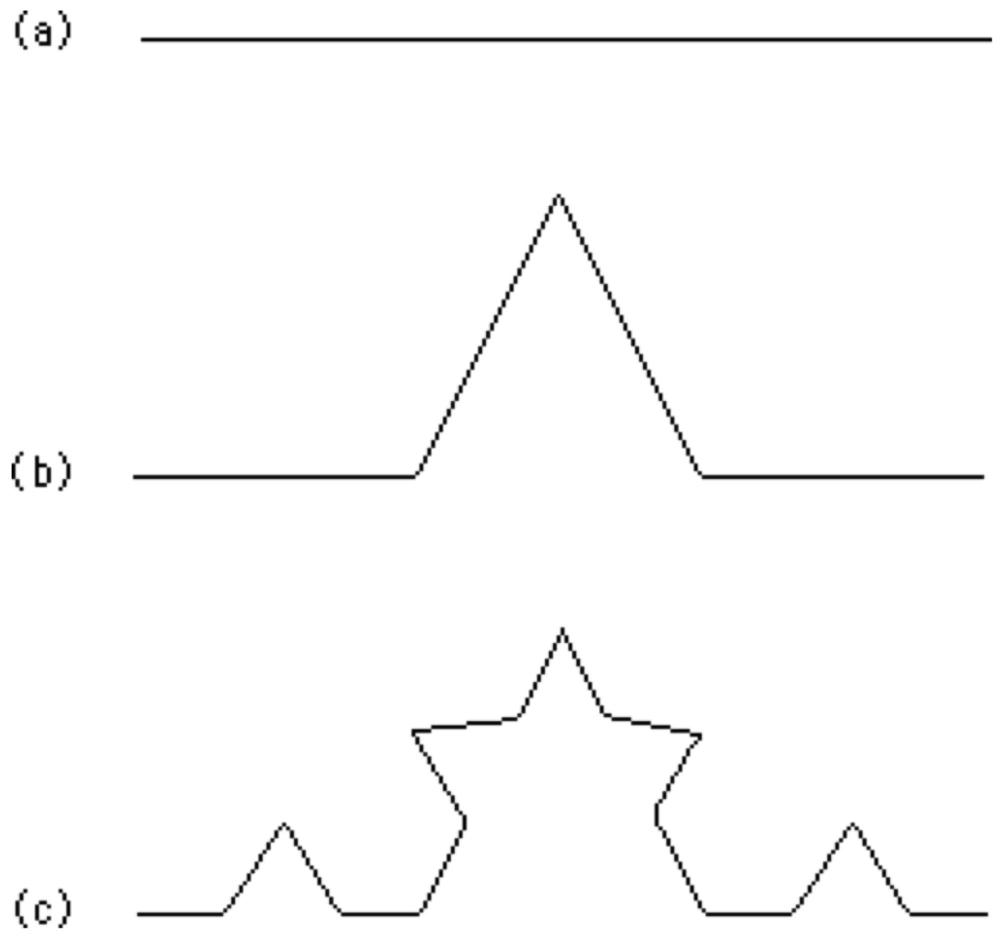
Dimensión de un fractal

La definición
de dimensión
NO es única

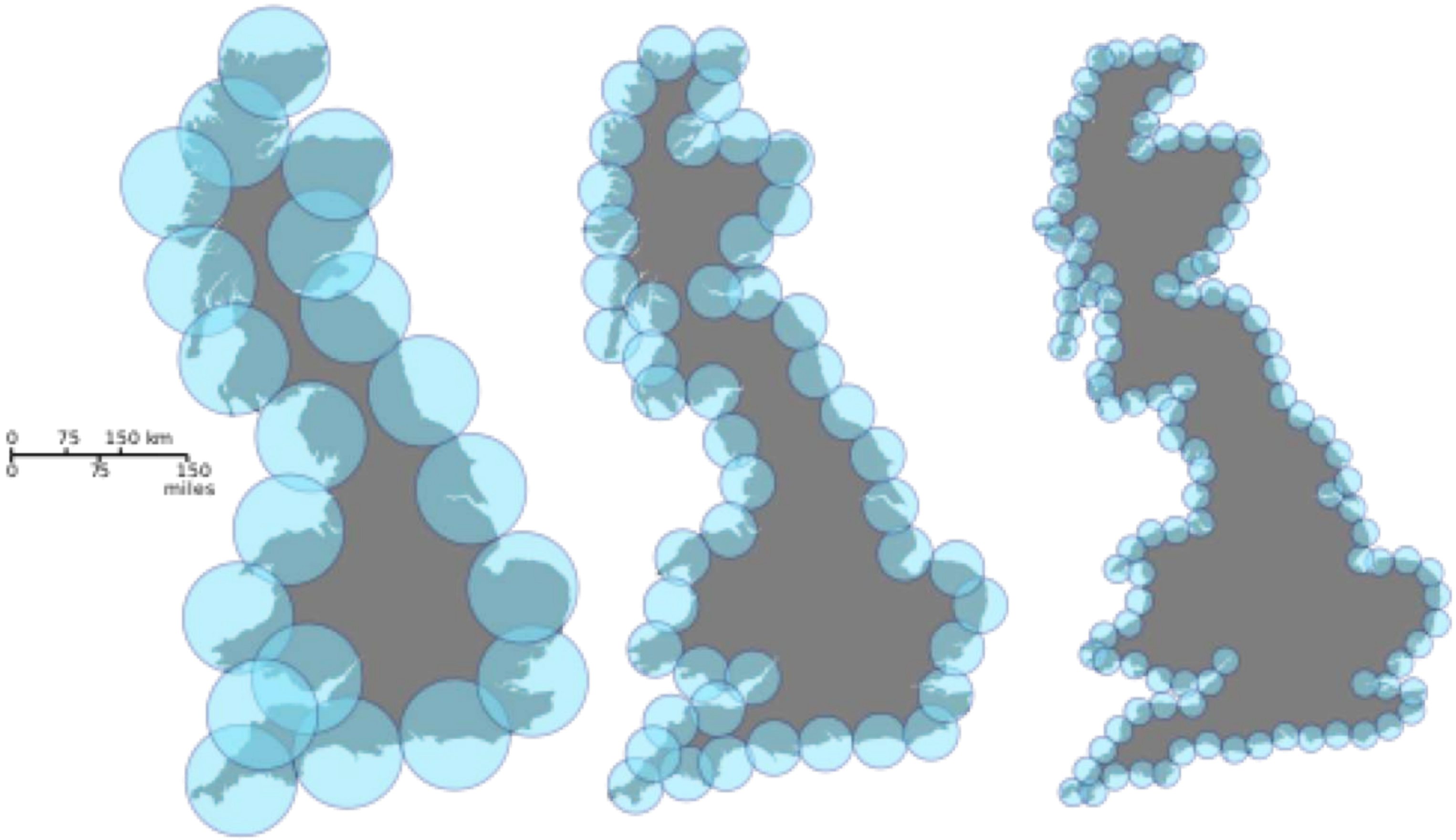
Dimensión topológica D_T



¿Qué es una dimensión no entera?

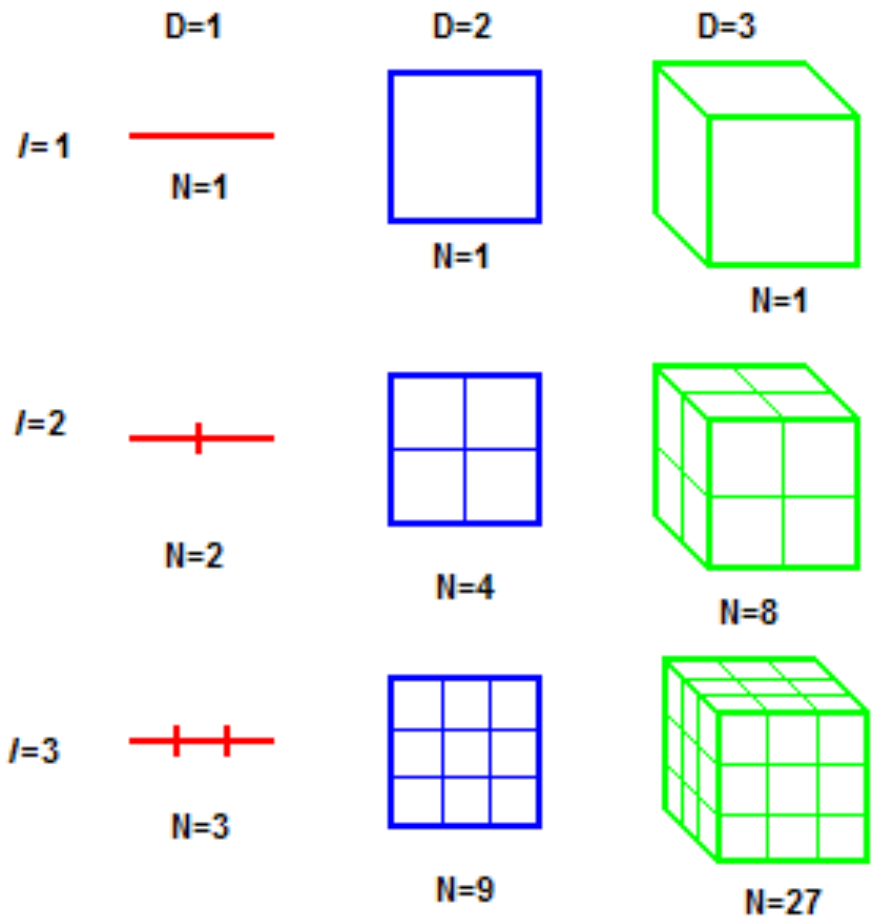


Dimensión de Hausdorff-Bezikovich D_{HB}



Dimensión de Minkowski-Bouligand D_{MB}

$$D_{MB} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$



Desigualdad de Szpilrajn

$$D_T \leq D_{HB}$$

En general:

$$D_T \leq \{D_\alpha\}_{\alpha>2} \leq D_2 \leq D_1 \leq D_0 = D_{MB} \leq D_E \leq D_C$$

$$D_T \leq D_{HB} \leq D_{MB} \leq D_E \leq D_C$$

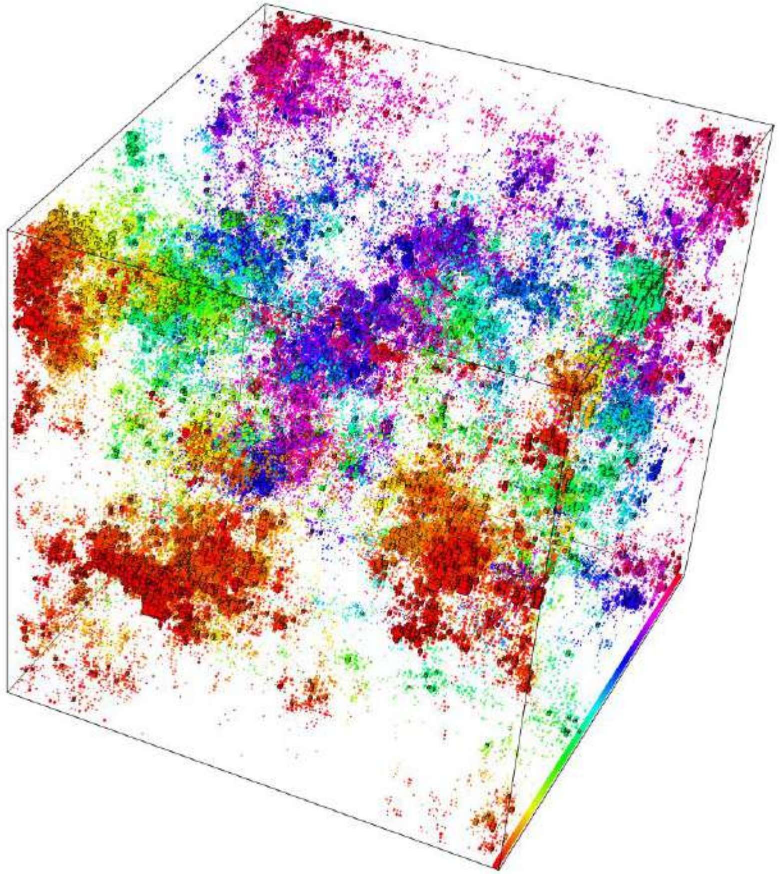
Si el conjunto es cerrado $\quad D_{HB} = D_{MB}$

Dimensiones de Rényi D_α

$$D_\alpha = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha} \frac{\log\left(\sum_i p_i^\alpha\right)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

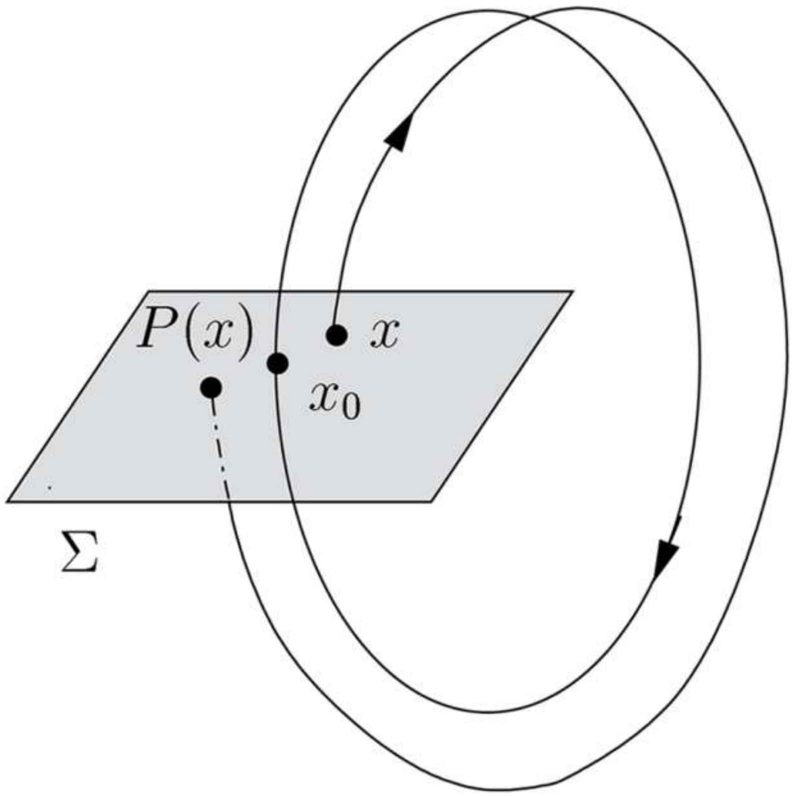
$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow D_{\alpha_1} \leq D_{\alpha_2}$$

Multifractales



Atractores extraños y fractales

- Aplicación de Poincaré

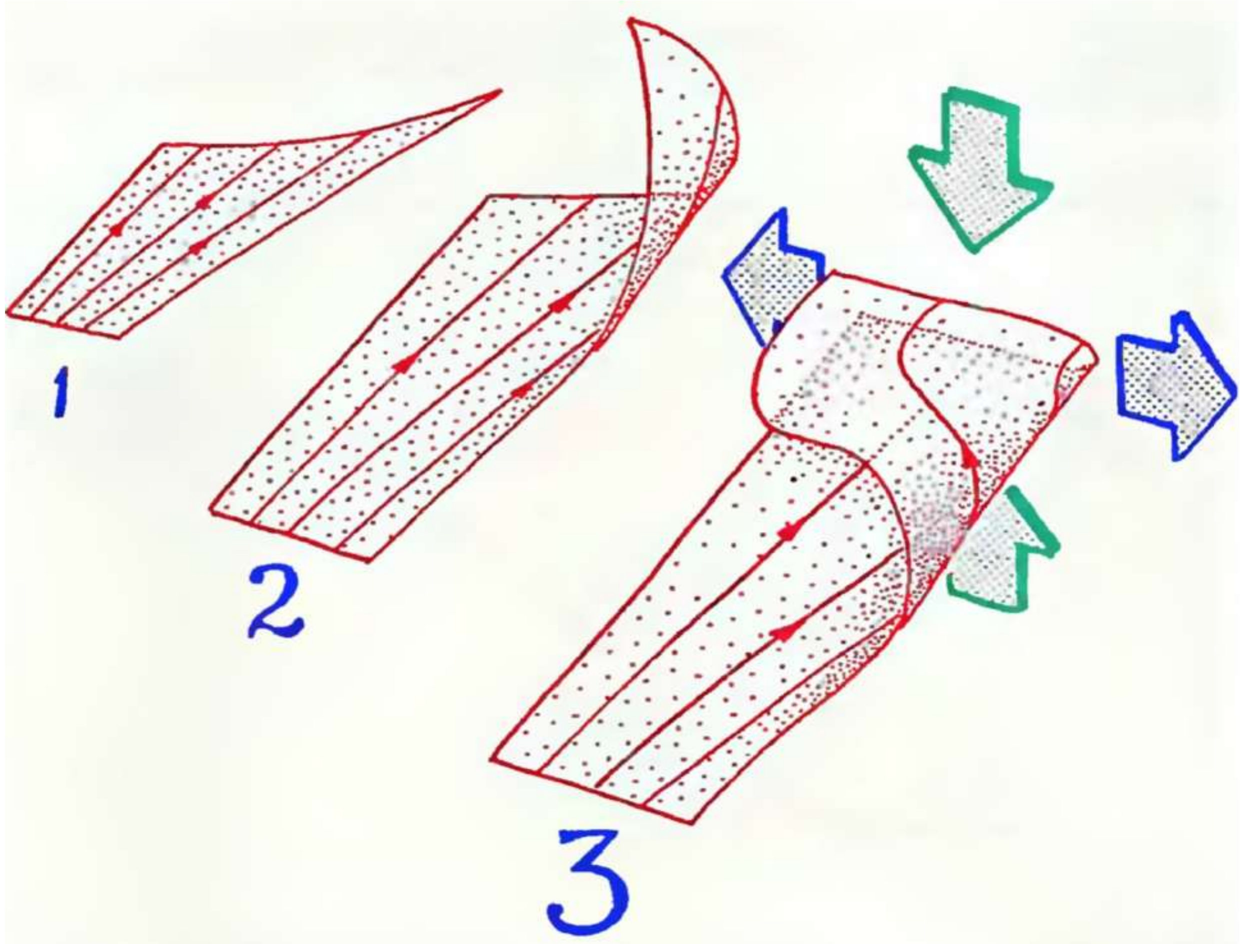


Atractores extraños y fractales

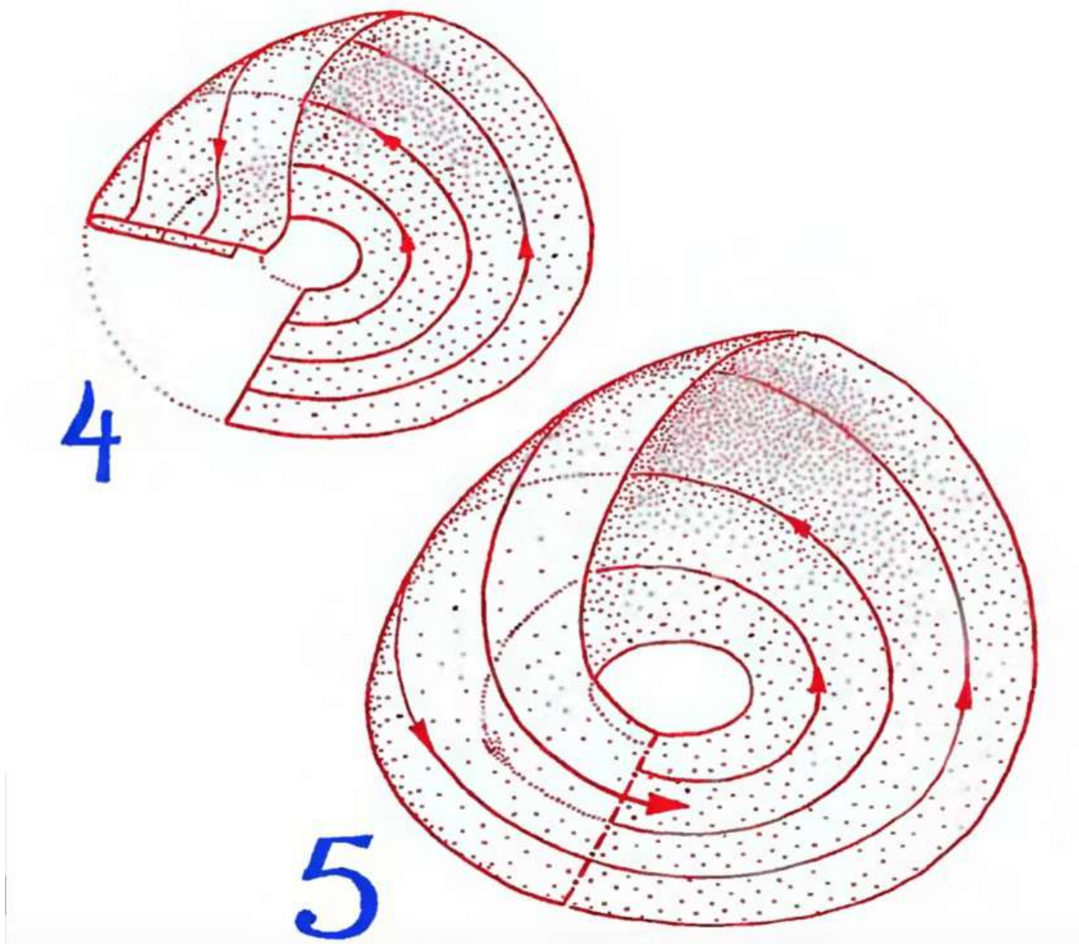
- Sistema de Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

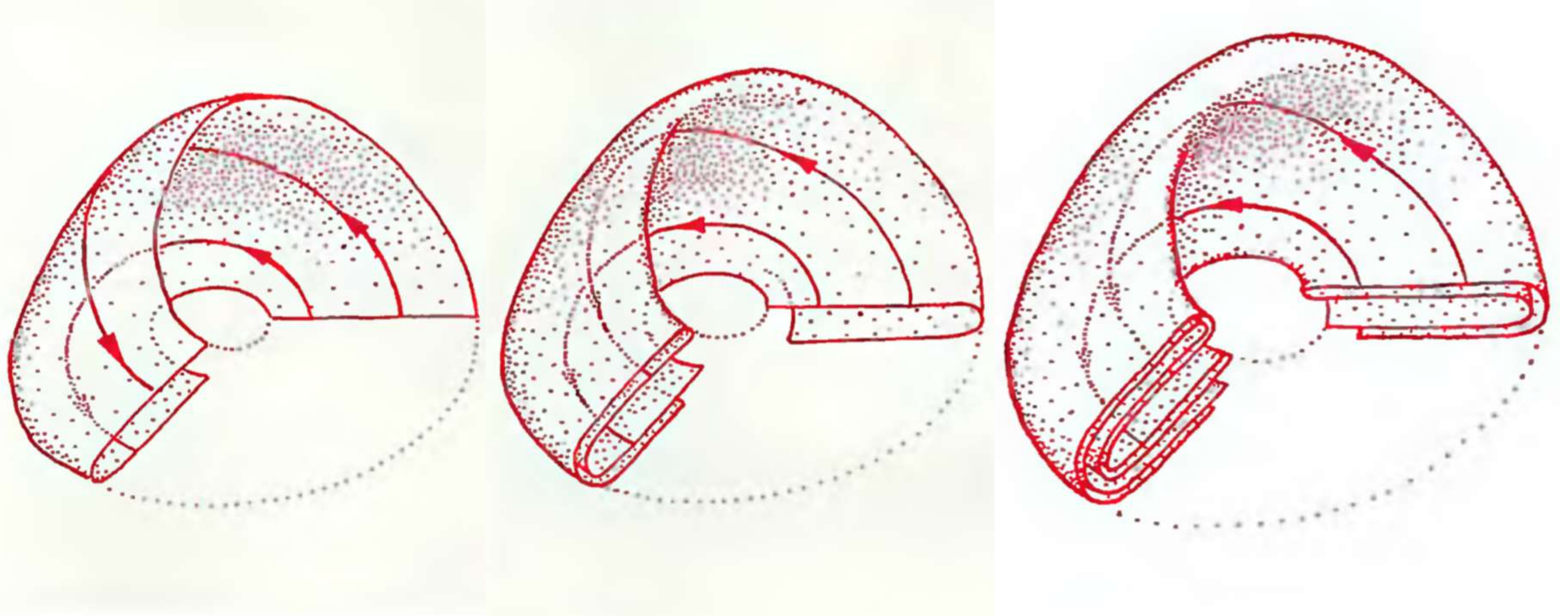
Atractores extraños y fractales



Atractores extraños y fractales

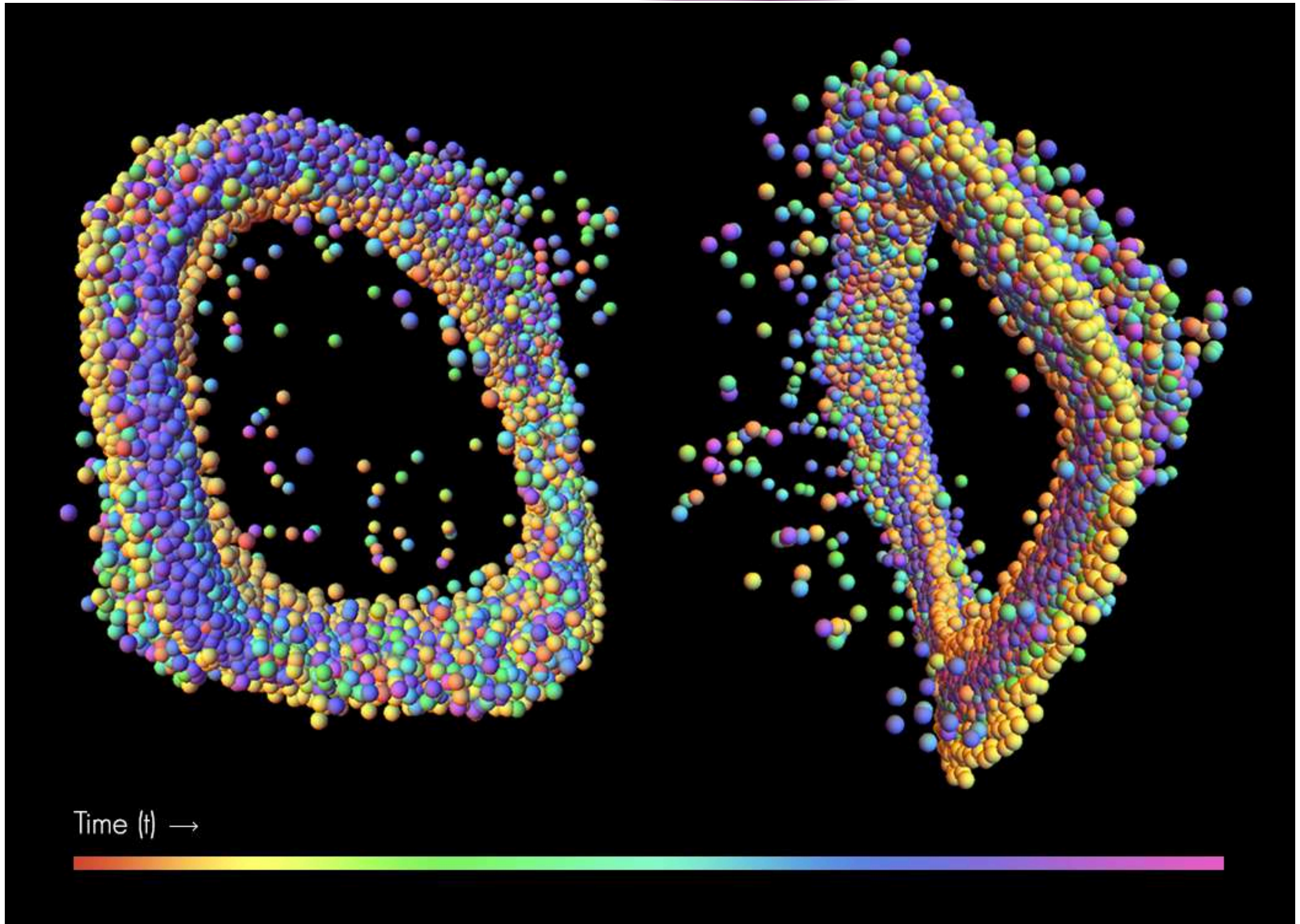


Atractores extraños y fractales

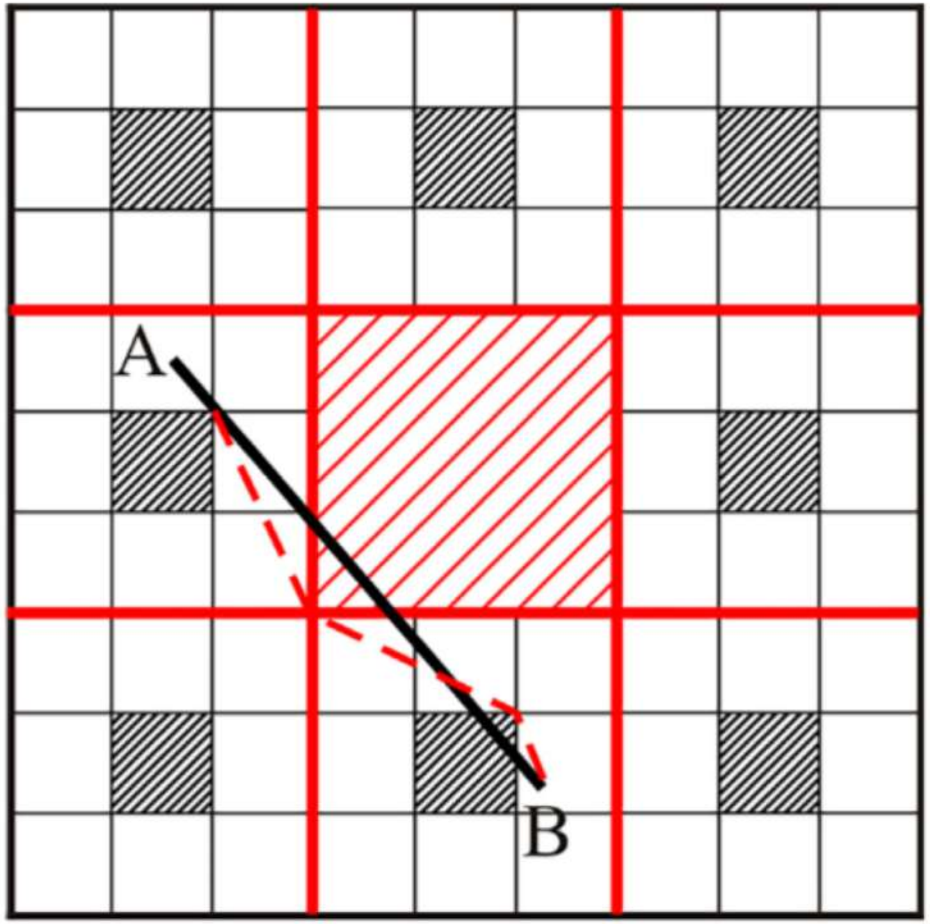


Atractores extraños y fractales

Atractores extraños no caóticos



Otras aplicaciones de los fractales



Otras aplicaciones de los fractales

- Cálculo fractal/fraccionario

$$\frac{\partial^{\tau} T}{\partial t^{\alpha}} = \lim_{t_1 \to t_o} \frac{T^{\tau}(t_1) - T^{\tau}(t_o)}{(t_1)^{\alpha} - (t_o)^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma(1+\gamma) \lim_{x_b - x_a \to L_o} \frac{T(x_b) - T(x_a)}{(x_b - x_a)^{\gamma}}$$

$$\nabla^{(\gamma,\eta,\sigma)} T = \frac{\partial T}{\partial x^{\gamma}} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y^{\eta}} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z^{\sigma}} \hat{z}$$

Ejemplo de cálculo fractal

- Conducción de calor en un medio poroso

$$\frac{d}{dx^{\alpha}}\left(k\frac{dT}{dx^{\alpha}}\right) = Q_o$$

$$T(0) = T_o$$

$$\frac{dT}{dx^{\alpha}}(0) = 0$$

Ejemplo de cálculo fractal

- Haciendo un cambio $x^{\alpha} = s$, tendremos:

$$\frac{d}{ds}\left(k\frac{dT}{ds}\right) = Q_o$$

- Con ello, obtenemos la solución:

$$T = \frac{Q_o}{2k}s^2 + T_o = \frac{Q_o}{2k}x^{2\alpha} + T_o$$

Ejemplo de cálculo fractal

- Se puede comprobar que, para $\alpha > 1.5$,

$$\frac{dT}{dx}(0) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}(0) = 0$$

$$\frac{d^3T}{dx^3}(0) = 0$$